Universitatea Transilvania din Braşov
Laboratorul de Vedere Artificială Robustă şi Control

Metode Numerice

Curs 4

Rezolvarea ecuațiilor algebrice neliniare

Gigel Măceșanu

Cuprins

- Formularea problemei
- Metoda înjumătățirii intervalului
- Metoda coardei (secantei)
- Metoda tangentei de ordinul I (Newton-Raphson)
- Metoda tangentei de ordinul II (Newton)
- Metoda tangentei de ordinul I și II pentru extragerea rădăcinii dintr-un număr pozitiv

Formularea problemei

- Fie ecuația neliniară: $f(x) = 0$
- Condiția necesară și suficientă pentru a avea o singură soluție în intervalul $[a, b]$ este ca funcția $f(x)$ să fie continuă, strict monotonă și să prezinte o schimbare de semn pe intervalul $[a, b]$:
  - $f: [a, b] \to R$ să fie o funcție Rolle, continuă și derivabilă în intervalul $[a, b]$ cu $f'(x) > 0$ sau $f'(x) < 0$
  - $f(a) \cdot f(b) < 0 \leftrightarrow f(a) < 0, f(b) > 0$ sau $f(a) > 0, f(b) < 0$
- Trei etape trebuie parcurse:
  - Căutarea rădăcinilor (de ex. utilizându-se șirul lui Rolle)
  - Localizarea rădăcinilor (metode nu foarte eficiente)
  - Rafinarea rădăcinilor

Metoda înjumătățirii intervalului

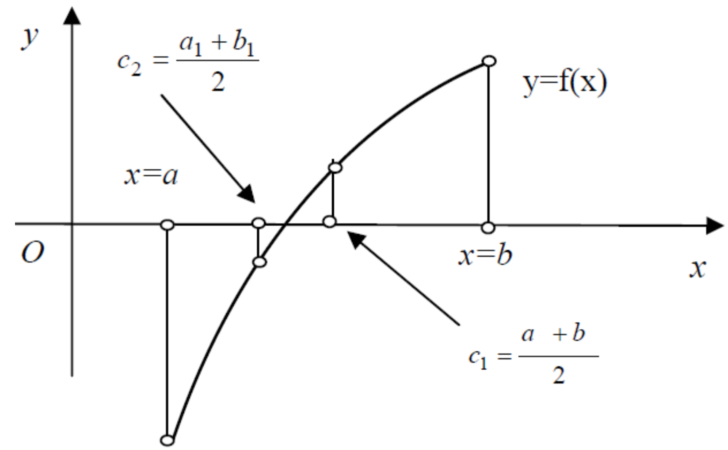
- Se determină mijlocul intervalului

inițial [a, b]: $c = \frac{a+b}{2}$

- Se verifică în ce subinterval se găsește

rădăcina, testând valoarea $f(a) \cdot f(c)$:

$$f(a) \cdot f(c) \rightarrow \begin{cases} f(a) \cdot f(c) \leq 0 \rightarrow [a, c] \\ f(a) \cdot f(c) > 0 \rightarrow [c, b] \end{cases}$$



- Se verifică dacă s-a obţinut rădăcina $f(c) \leq \varepsilon$:
  - Da, rădăcina este $\alpha = c$ și algoritmul de căutare se oprește;
  - Nu, rădăcina nu a fost determinată →se mai parcurge o etapă
    - La etapele următoare se efectuează același tip de calcule, dar pentru intervalul restrâns la etapa precedentă.

Metoda coardei (secantei)

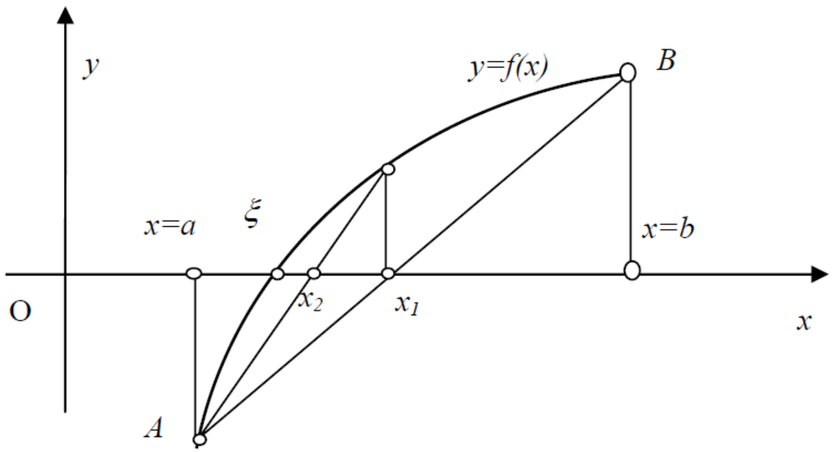
- Se consideră funcția $f(x)$ continuă

și derivabilă pe intervalul $[a,b]$, adică

este îndeplinită condiția: $f(a) \cdot f(b) < 0$

- PP că $f(x) = 0$ are o singură rădăcină

$\xi \in (a,b)$, cu $f(a) < 0$ și $f(b) > 0$



- Secanta este definită de dreapta:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \Leftrightarrow y - f(a) = (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Rădăcina ecuației $f(x) = 0$ este aproximată de intersecția axei Ox cu secanta definită anterior. Punctul de intersecție (pentru $y = 0$):

$$x_1 = a - f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

Metoda coardei (secantei)

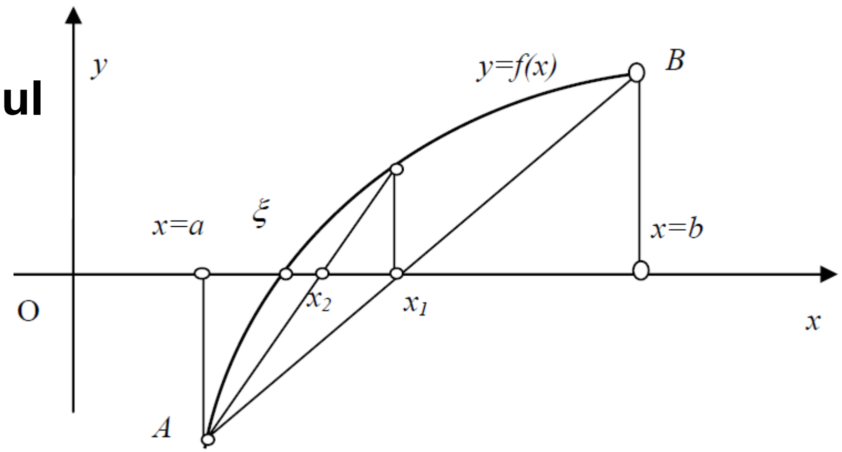
- Noul interval al rădăcinii este (a, x_1),

deoarece $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, repetăm algoritmul

- PP ultimul subinterval pentru care

funcția își modifică semnul este (x_{n-1}, x_n),

adică este satisfăcută condiția:



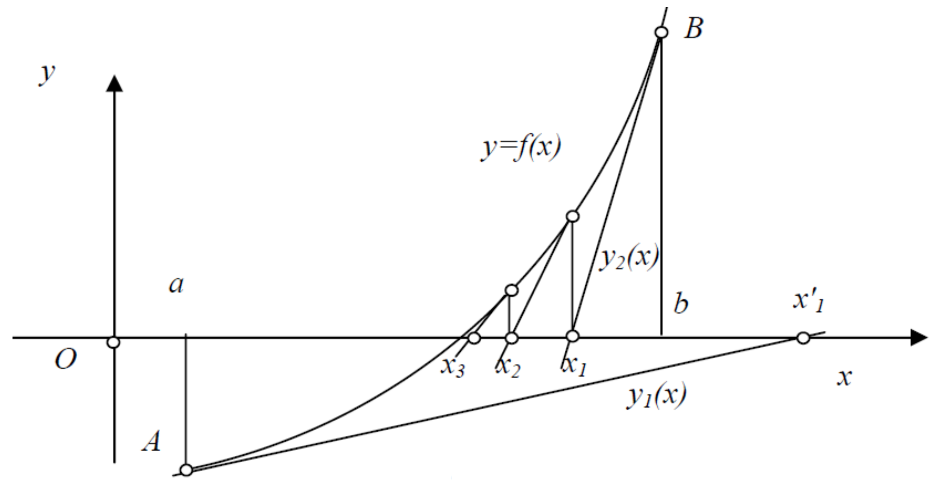
$$f(x_{n-1}) \cdot f(x_n) < 0$$

- Relația de recurență a metodei este:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Metoda tangentei de ordinul I (Newton-Raphson)

- **Funcția $f(x)$ îndeplinește condițiile:**
  - **Continuă și derivabilă pe $[a, b]$**
  - **Schimbă semnul: $f(a) \cdot f(b) < 0$**
  - **Strict monotonă: $f'(x) > 0$, sau $f'(x) < 0$**



  - **Graficul ei nu admite nici un punct de inflexiune pe $[a, b]$: $f''(x) \neq 0$**

- **Se dezvoltă funcția $f(x)$ în serie Taylor, în jurul punctului $x = a$**

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \cdots$$

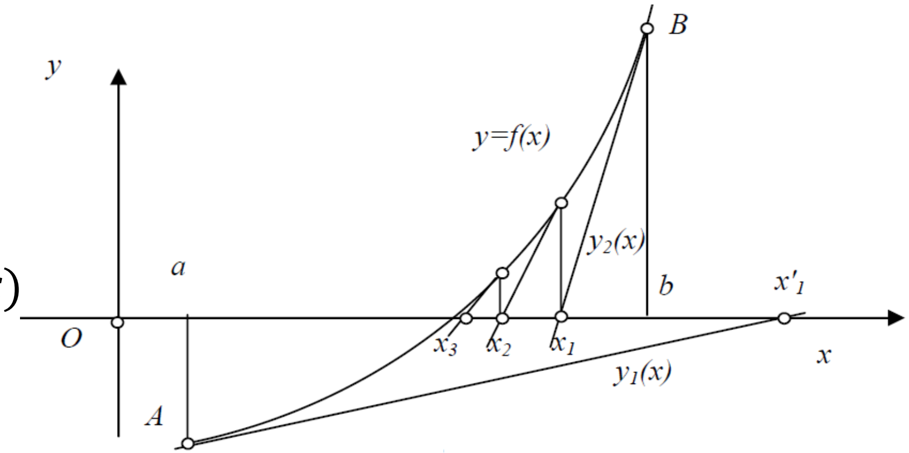
- **Reținând doar primii doi termeni ai dezvoltării, se obține ecuația unei drepte, tangente la graficul funcției în punctul A:**

$$y_1 = f(a) + (x-a) f'(a)$$

Metoda tangentei de ordinul I (Newton-Raphson)

- Intersecția tangentei cu Ox ($y_1 = 0$):

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$



- Dezvoltând în serie Taylor funcția $f(x)$ în jurul punctului $x = b$, reținem primii doi termeni abținem tangenta funcției în B, care intersectează Ox în x_2:

$$x_2 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

- Formula de recurență a metodei tangentei este următoarea:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

> Obs: este importantă alegerea punctelor de start
> Dacă prima sau a doua derivată se anulează în interiorul intervalului, metoda nu e convergentă

Metoda tangentei de ordinul I (Newton-Raphson)

- Pentru a face o apreciere asupra convergentei metodei, se va utiliza dezvoltarea în serie Taylor a funcției inițial
- Pp că valoarea exactă a soluției este α şi prin urmare $f(\alpha) = 0$, atunci două determinării succesive ale soluției se vor putea scrie sub forma:

$$x_k = \alpha + e_k \text{ și } x_{k+1} = \alpha + e_{k+1}$$

unde, e_k și e_{k+1} sunt erorile produse la cele două etape succesive

- Înlocuind aceste valori în relația de recurență a metodei se obține:

$$\alpha + e_{k+1} = \alpha + e_k - \frac{f(\alpha + e_k)}{f'(\alpha + e_k)}$$

- Prin dezvoltarea în serie Taylor a funcției în jurul punctului α și păstrând numai primii doi termeni ai dezvoltării, se obține egalitatea:

Metoda tangentei de ordinul I (Newton-Raphson)

$$e_{k+1} = e_k - \frac{f(\alpha) + e_k \cdot f'(\alpha)}{f'(\alpha + e_k)}$$

$$e_{k+1} = e_k \cdot \left(1 - \frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha + e_k)}\right) = e_k \cdot \frac{f'(\alpha + e_k) - f'(\alpha)}{f'(\alpha + e_k)} = e_k \cdot \frac{f'(\alpha) + e_k \cdot f''(\alpha) - f'(\alpha)}{f'(\alpha + e_k)}$$

- **Eroarea care se produce la o etapă oarecare fată de eroarea produsă la etapa precedentă:**

$$e_{k+1} = e_k^2 \cdot \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha + e_k)}$$

- **Convergența metodei este una mai bună decât aceea a metodei secantei**

Metoda tangentei de ordinul II (Newton)

- **Funcția $f(x)$ îndeplinește condițiile:**
  - **Continuă și derivabilă pe intervalul $[a, b]$**
  - **Schimbă semnul: $f(a) \cdot f(b) < 0$**
  - **Strict monotonă: $f'(x) > 0$, sau $f'(x) < 0$**
  - **Graficul ei nu admite nici un punct de inflexiune pe $[a, b]$: $f''(x) \neq 0$**
- **Se dezvoltă funcția $f(x)$ în serie Taylor, în jurul punctului $x = a$**

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \cdots$$

- **Reținând doar primii trei termeni ai dezvoltării, se obține ecuația unei parabole:**

$$y_1 = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a)$$

Metoda tangentei de ordinul II (Newton)

- Din ecuația parabolei:

$$y_1 = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)$$

- Punem condiția $y = 0$ vom avea:

$$f(a) + (x-a)\left[f'(a) + \frac{(x-a)}{2!}f''(a)\right] = 0$$

- Se obține înlocuind cu expresia lui $x-a$ din metoda RN: $x - a = -\frac{f(a)}{f'(a)}$

$$f(a) + (x-a)\left[f'(a) - \frac{1}{2}\frac{f(a)}{f'(a)}f''(a)\right] = 0$$

- Rezultă: $x = a - \frac{1}{\frac{f'(a)}{f(a)} - \frac{f''(a)}{2\cdot f'(a)}}$

- Dacă soluția este în afara intervalului, se schimba punctul de start $x = b$
- Relația de recurență a metodei tangentei de ordinul II este:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2\cdot f'(x_n)}}$$

Metoda tangentei de ordinul I pentru extragerea rădăcinii dintr-un număr pozitiv

- Soluția unei ecuații de forma $f(x) = x^k - N = 0$ reprezintă rădăcina de ordinul k dintr-un număr pozitiv N: $x = \sqrt[k]{N}$
- Înlocuind în formula de recurență a metodei tangentei derivata:

$$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Se obține relația de recurență pentru determinarea rădăcinii de ordinul k dintr-un număr N:

$$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n^k + N}{k \cdot x_n^{k-1}} \text{ sau}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_n + \frac{N}{x_n^{k-1}}\right]$$

Metoda tangentei de ordinul II pentru extragerea rădăcinii dintr-un număr pozitiv

- Soluția unei ecuații de forma $f(x) = x^k - N = 0$ reprezintă rădăcina de ordinul k dintr-un număr pozitiv N: $x = \sqrt[k]{N}$
- Înlocuind în formula de recurență a metodei tangentei de ordinul II derivata de ordinul unu si doi:

$$f'(x) = kx^{k-1}; f''(x) = k(k-1)x^{k-2}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2 \cdot f'(x_n)}}$$

- Se obține relația de recurență pentru determinarea rădăcinii de ordinul k dintr-un număr N:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n(x_n^k - N)}{(k-1)x_n^k + (k-1)N}$$ sau $$x_{n+1} = x_n \frac{(k-1)x_n^k + (k+1)N}{(k+1)x_n^k + (k-1)N}$$

Contact:
Email: gigel.macesanu@unitbv.ro
Web: rovis.unitbv.ro