1. Algebra liniară

1.1 Matrici și vectori

O matrice este un tabel de numere, de obicei bidimensional, reprezentat în felul următor:

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Aceasta este o matrice bidimensională, având dimensiunile m și n. Considerăm că această matrice aparține spațiului $R^{m\times n}$. Dimensiunea unei matrice bidimensionale este dată de numărul de linii $\times$ numărul de coloane.

1.1.1 Adresarea elementelor unei matrice

De exemplu, putem folosi următoarea matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 123 & 231 & 546 \\ 431 & 876 & 111 \\ 654 & 256 & 129 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

din care se adresează elemente individuale în felul următor:

$$A_{1,1} = 123,$$
$$A_{1,3} = 546,$$
$$A_{2,2} = 876,$$
$$A_{3,1} = 654.$$

Generalizând, putem spune că elementul de pe linia m și coloana n are valoarea $A_{m,n}$.

1.1.2 Vectorii

Vectorii sunt un caz particular al matricelor, în general folosindu-se vectorii-coloană:

$$y = \begin{pmatrix} 333 \\ 211 \\ 356 \\ 414 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Vectorul y din ecuația 1.3 este o matrice unidimensională $y \in R^{4\times 1}$. Adresarea unui element dintr-un vector se face în felul următor:

$$y_1 = 333,$$
$$y_4 = 414.$$

Observație: în aceste exemple, am folosit adresarea începând de la indexul 1. Însă, în majoritatea limbajelor de programare, se folosește adresarea începând de la indexul 0. Așadar, de exemplu, pentru a accesa primul element din vectorul de mai sus, vom avea în loc de $y_1 = 333$, $y_0 = 333$.

1.2 Adunarea matricelor și înmulțirea cu scalari

Pentru a putea aduna două matrice A și B este necesar ca acestea să aibă aceleași dimensiuni, adică $A \in R^{m,n}$ și $B \in R^{m,n}$. Vom lua, ca exemplu, adunarea a două matrice A și B, iar rezultatul îl vom numi C.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

iar matricea C va avea valoarea:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Înmulțirea matricelor cu scalari este, de asemenea, simplă și o vom exemplifica în ecuația

1.6:

$$2 \times \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 8 & 4 & 16 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

1.3 Multiplicarea matricelor

Dacă vrem să înmulțim două matrice A și B, trebuie să avem grijă ca acestea să aibă dimensiuni compatibile: A trebuie să fie de forma $R^{m\times n}$, iar B trebuie să fie de forma $R^{n\times p}$. Rezultatul acestei înmulțiri va fi de forma $R^{m\times p}$. Fiecare linie a matricei A se înmulțește cu fiecare coloană a matricei B. Rezultatele intermediare se adună, iar suma va forma elementul matricei rezultat. Vom lua ca exemplu matricea A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

și o vom înmulți cu matricea B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Se poate observa că matricea A are dimensiunea 3×2, iar matricea B are dimensiunea 2×3. Acestea au dimensiuni compatibile pentru a fi înmulțite. Rezultatul va avea dimensiunea 3×3:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot 3 + 2\cdot 3 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 & 2\cdot 3 + 1\cdot 3 \\ 3\cdot 1 + 3\cdot 2 & 3\cdot 2 + 3\cdot 1 & 3\cdot 3 + 3\cdot 3 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Așadar vom obține matricea $C \in R^{3\times 3}$:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Observație: înmulțirea matricelor nu este **comutativă**, însă este **asociativă**.

1.3.1 Matricea identitate

Matricea identitate este elementul neutru la înmulțirea matricelor, se notează cu I sau $I_{n\times n}$, este o matrice pătratică și are proprietatea $A \cdot I = A$. Aceasta este formată din cifra 1 pe diagonala principală și 0 în rest.

În următorul exemplu se prezintă matricea identitate cu dimensiunea 3×3:

$$I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

1.4 Inversa și transpusa unei matrice

1.4.1 Inversa unei matrice

Matricea inversă a matricei pătratice A se notează cu A^{-1} și are proprietatea ca $A^{-1} \cdot A = I$. Nu toate matricele sunt inversabile, iar acelea care nu deţin o matrice inversă se numesc *matrice singulare*. Dându-se următoarea matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 16 \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

inversa sa este:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.05 & 0,075 \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Prin înmulțire, vom obține:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.05 & 0,075 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

1.4.2 Transpusa unei matrice

Dacă avem o matrice A, atunci transpusa acesteia, notată cu A^T se obține inversându-se liniile cu coloanele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} => A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$